Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

VIII. tjedan

Jednadžbe diferencija

1. Zadan je sustav $y(n+1)+2y(n)=u(n)$, pri čemu je $y(0)=2$, $n \in N_0$. Je li sustav linearan? Obrazložite odgovor.

Rješenje:

Kako je u zadanom sustavu zadan početni uvjet – sustav nije linearan.

Demonstrirajmo to.

Ako su početni uvjeti jednaki nuli.

1. slučaj:

Ako je na ulazu $u_1(n)$, na izlazu iz sustava u koraku *n+1* će biti $y_1(1)=u_1(0)-2y_1(0)$.
Ako je na ulazu $u_2(n)$, na izlazu iz sustava u koraku *n+1* će biti $y_2(1)=u_2(0)-2y_2(0)$.
Nakon množenja sa konstantama $\alpha\ i\ \beta$ te zbrajanja, odziv je

$$y(1)=\alpha\big(u_1(0)-2y_1(0)\big)+\beta\big(u_2(0)-2y_2(0)\big)=\alpha u_1(0)+\beta u_2(0)-2\big(\alpha y_1(0)+\beta y_2(0)\big)$$
$$=\alpha u_1(0)+\beta u_2(0)$$

2. slučaj:

Sada je na ulazu $u(n)=\alpha u_1(n)+\beta u_2(n)$. Na izlazu će biti

$$y(1)=\ \alpha u_1(0)+\beta u_2(0)-2y(0)=\alpha u_1(0)+\beta u_2(0).$$

Usporedbom ova dva odziva vidljivo je da su jednaki, pa sustav može biti linearan.

Ako postoje početni uvjeti.

1. slučaj:

Ako je na ulazu $u_1(n)$, na izlazu iz sustava u koraku *n+1* će biti $y_1(1)=u_1(0)-2y_1(0)$.
Ako je na ulazu $u_2(n)$, na izlazu iz sustava u koraku *n+1* će biti $y_2(1)=u_2(0)-2y_2(0)$.
Nakon množenja sa konstantama $\alpha\ i\ \beta$ te zbrajanja, odziv je

$$y(1)=\alpha\big(u_1(0)-2y_1(0)\big)+\beta\big(u_2(0)-2y_2(0)\big)=\alpha u_1(0)+\beta u_2(0)-2\big(\alpha y_1(0)+\beta y_2(0)\big)$$
$$=\alpha u_1(0)+\beta u_2(0)-4(\alpha+\beta).$$

2. slučaj:

Sada je na ulazu $u(n)=\alpha u_1(n)+\beta u_2(n)$. Na izlazu će biti

$$y(1)=\ \alpha u_1(0)+\beta u_2(0)-2y(0)=\alpha u_1(0)+\beta u_2(0)-4.$$

Usporedbom ova dva odziva vidljivo je da su različiti, pa je sustav nelinearan.

Za ovakve sustave kod kojih je cjelokupni odziv superpozicija odziva linearnog sustava i odziva nepobuđenog sustava (početno stanje) kažemo da su inkrementalno linearni sustavi.

2. Zadan je sustav
$$y(n+2) - y(n+1) - y(n) = 0,$$
s početnim uvjetima $y(0) = 0, y(1) = 1$. Pronađite odziv sustava! Napišite prvih pet članova dobivenog niza! Prepoznajete li dobiveni niz?

<u>Rješenje:</u>

Prve članove niza najlakše je odrediti Iterativnom metodom. Jednadžba se zapiše u obliku

$$y(n+2) = y(n+1) + y(n)$$

te se uvrštavaju vrijednosti iz koraka u korak.

Početne vrijednosti su:

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 1.$$

Uvrštavanjem slijedi:

$$y(2) = y(1) + y(0) = 1 + 0 = 1$$

$$y(3) = y(2) + y(1) = 1 + 1 = 2$$

$$y(4) = y(3) + y(2) = 2 + 1 = 3$$

$$y(5) = y(4) + y(3) = 3 + 2 = 5 \ldots$$

Dobili smo niz: 0,1,1,2,3,5,8,... Ovo je dobro poznati Fibonaccijev niz.

Kako naći npr. 1000-ti član ovog niza? Iterativnim postupkom dugotrajno. Bolja ideja je rješavanjem homogene jednadžbe.

Pretpostavljeno homogeno rješenje je $y_h(n) = Cq^n$.

Uvršavanjem u zadanu jednadžbu proizlazi:

$$Cq^{n+2} - Cq^{n+1} - Cq^n = 0$$

$$q^2 - q - 1 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Homogeno rješenje: $y_h(n) = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Konstante se nalaze iz početnih uvjeta.

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0, y(1) = C_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1,$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, C_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Rješenje sustava: $y(n) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)\mu(n)$.

3. Zadan je sustav $y(n+3) - y(n) = 0$, uz početne uvjete $y(0) = y(1) = 0, y(2) = 1$. Pronađite odziv sustava! Jesu li svi članovi dobivenog niza cijeli brojevi?

Rješenje:

Odziv nepobuđenog sustava traži se rješavanjem homogene jednadžbe, uz pretpostavljeno homogeno rješenje $y_h(n) = Cq^n$.

Uvrštavanjem u zadanu jednadžbu proizlazi:

$$Cq^{n+3} - Cq^n = 0$$

$$q^3 - 1 = 0$$

$$q_1 = 1, q_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Homogeno rješenje: $y_h(n) = C_1 + C_2 \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n + C_3 \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

Konstante se nalaze iz početnih uvjeta.

$$y(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 0,$$

$$y(1) = C_1 + C_2 \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} + C_3 \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = 0,$$

$$y(2) = C_1 + C_2 \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + C_3 \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1.$$

Rješavanjem tri jednadžbe sa tri nepoznanice dobiva se: $C_1 = \frac{1}{3}, C_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{6}, C_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{6}$.

Traženi odziv sustava $y_h(n) = \frac{1}{3} + \frac{-1-i\sqrt{3}}{6} \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{-1+i\sqrt{3}}{6} \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

Sređivanjem ovog kompleksnog izraza, te korištenjem $-1 - i\sqrt{3} = 2e^{-j\frac{2\pi}{3}}, -1 + i\sqrt{3} = 2e^{j\frac{2\pi}{3}}$, dobiva se odziv bez kompleksnih dijelova $y(n) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{3}(n+1)\right)$.

Jesu li svi elementi dobivenog niza cijeli brojevi? Ovo se može zaključiti iz zadane jednadžbe iterativnim postupkom: $y(n+3) = y(n)$. Kako su prva tri elementa cijeli brojevi *0, 0, 1* i svi sljedeći elementi niza će biti cijeli brojevi.

4. Naći odziv mirnog sustava opisanog jednadžbom diferencija:

$$3y(n+2) + 6y(n+1) + 3y(n) = 2u(n+1) - 5u(n)$$

Sustav je pobuđen nizom impulsa $u(n) = \{\dots, \underline{0}, 0,1,2,1,0,0, \dots\}$, gdje je podvučena vrijednost amplituda impulsa u koraku $n = 0$.

Rješenje:

Mirni sustav je sustav u kojem je poznata pobuda, ali su mu početni uvjeti jednaki nuli:

$$y(0) = 0, y(1) = 0.$$

Kako je pobuda zadana u obliku niza impulsa, odziv je najlakše naći iterativnom metodom.

Izlaz $y(n+2) = -2y(n+1) - y(n) + \frac{2}{3}u(n+1) - \frac{5}{3}u(n)$,

u trenucima *n* iznosi:

$$n = 0 \to y(2) = -2y(1) - y(0) + \frac{2}{3}u(1) - \frac{5}{3}u(0) = 0,$$

$$n = 1 \to y(3) = -2y(2) - y(1) + \frac{2}{3}u(2) - \frac{5}{3}u(1) = \frac{2}{3},$$

$$n = 2 \to y(4) = -2y(3) - y(2) + \frac{2}{3}u(3) - \frac{5}{3}u(2) = -\frac{5}{3},$$

$$n = 3 \to y(5) = -2y(4) - y(3) + \frac{2}{3}u(4) - \frac{5}{3}u(3) = 0,$$

$$n = 4 \to y(6) = -2y(5) - y(4) + \frac{2}{3}u(5) - \frac{5}{3}u(4) = 0,$$

$$n = 5 \to y(7) = -2y(6) - y(5) + \frac{2}{3}u(6) - \frac{5}{3}u(5) = 0, \dots$$

Za sve veće *n* pobuda je nula, a kako su i prethodni odzivi nula i za svaki sljedeći korak odziv će biti nula.

$$y_m = \left\{\dots, \underline{0}, 0, 0, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 0, \dots\right\}.$$

5. Pronađite barem jedan sustav čiji je nepobuđeni odziv:
   a. $y(0) = 0, y(1) = 1, y(2) = 2, y(3) = 1.$
   b. $y(n) = 3^n + 5^n + 7.$

<u>Rješenje:</u>

a. Pretpostavimo da je dani nepobuđeni odziv sustava drugog reda. Jednadžba diferencija drugog reda u općem obliku glasi (za nepobuđeni sustav): $y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n) = 0.$

   Koeficijente ćemo naći iterativnom metodom:

$$y(n+2) = -a_1 y(n+1) - a_2 y(n)$$

   Uvrštavanjem zadanih impulsa:

$$n = 0 \rightarrow y(2) = -a_1 y(1) - a_2 y(0) = -a_1 \cdot 1 - a_2 \cdot 0 = 2 \rightarrow a_1 = -2.$$

$$n = 1 \rightarrow y(3) = -a_1 y(2) - a_2 y(1) = -a_1 \cdot 2 - a_2 \cdot 1 = 1 \rightarrow \ a_2 = 3.$$

   Jedna moguća jednadžba diferencija glasi:

$$y(n+2) - 2y(n+1) + 3y(n) = 0 \text{ uz } y(0) = 0, y(1) = 1.$$

b. Jednadžbu je moguće naći analognim algoritmom kako se traži homogeno rješenje, samo obratnim redoslijedom.

$$y_h(n) = 3^n + 5^n + 7 \cdot 1^n.$$

   Iz homogenog rješenja mogu se očitati karakteristične frekvencije $q_1 = 3, q_2 = 5, q_3 = 1$ i koeficijenti ispred njih $C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 7$. Tri karakteristične frekvencije vode do toga da bi jednadžba mogla biti trećeg reda.
   Ako su poznata rješenja kubne jednadžbe ona se mogu napisati u obliku

$$(q-3)(q-5)(q-1) = 0,$$

   Odnosno

$$q^3 - 9q^2 + 23q - 15 = 0.$$

   Ili u proširenom obliku

$$Cq^{n+3} - 9Cq^{n+2} + 23Cq^{n+1} - 15Cq^n = 0.$$

   Ako je pretpostavljeno homogeno rješenje oblika $y_p(n) = Cq^n$, onda je homogena jednadžba:

$$y(n+3) - 9y(n+2) + 23y(n+1) - 15y(n) = 0.$$

   Da bi jednadžba bila dobro zadana moramo poznavati i početne uvjete koje nađemo iz zadanog homogenog rješenja:

$$y(0) = 3^0 + 5^0 + 7 = 9,$$
$$y(1) = 3^1 + 5^1 + 7 = 15,$$
$$y(2) = 3^2 + 5^2 + 7 = 41.$$

6. Na ulazu diskretnog sustava narinut je signal $u(n)$. Korištenjem konvolucijske sumacije naći impulsni odziv ako je poznat odziv mirnog sustava $y(n)$. Zadani su ulazni signal $u(n) = \{\dots,0,\underline{1},2,3,4,5,6,\dots\}$ i izlazni signal $y(n) = \{\dots,0,\underline{0},-1,1,2,3,4,5,\dots\}$, gdje je podvučena vrijednost amplituda impulsa u koraku $n = 0$.

Rješenje:

Konvolucijska sumacija kauzalnih nizova računa se prema

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)u(n-m).$$

U koraku $n = 0$ izlaz iz sustava se računa iz $y(0) = \sum_{m=0}^{0} h(m)u(0-m) = h(0)u(0)$.
Kako su $y(0) = 0, u(0) = 1$impulsni odziv u nultom koraku je $h(0) = 0$.

U sljedećim koracima slijedi:

$$y(1) = \sum_{m=0}^{1} h(m)u(1-m) = h(0)u(1) + h(1)u(0) = 0 \cdot 2 + h(1) \cdot 1 = -1 \to h(1) = -1,$$

$$y(2) = \sum_{m=0}^{2} h(m)u(2-m) = h(0)u(2) + h(1)u(1) + h(2)u(0) = 0 \cdot 3 - 1 \cdot 2 + h(2) \cdot 1 = 1 \to h(2) = 3,$$

$$y(3) = \sum_{m=0}^{3} h(m)u(3-m) = h(0)u(3) + h(1)u(2) + h(2)u(2) + h(3)u(0) = 0 \cdot 4 - 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + h(3) \cdot 1 = 2 \to h(3) = -1,$$

$$y(4) = \sum_{m=0}^{4} h(m)u(4-m) = h(0)u(4) + h(1)u(3) + h(2)u(2) + h(3)u(1) + h(4)u(0) = 0 \cdot 5 - 1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 - 1 \cdot 2 + h(4) \cdot 1 = 3 \to h(4) = 0,$$

$$\begin{aligned} y(5) = \sum_{m=0}^{5} h(m)u(5-m) &= h(0)u(5) + h(1)u(4) + h(2)u(3) + h(3)u(2) + h(4)u(1) + h(5)u(0) \\ &= 0 \cdot 6 - 1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 - 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + h(5) \cdot 1 = 4 \to h(5) = 0, \dots \end{aligned}$$

Slutnja: sve ostale vrijednosti impulsnog odziva su također nule. Provjerimo to.

Ulazni signal u općem obliku možemo zapisati: $u(n) = (n+1)\mu(n)$.
Izlazni signal možemo zapisati u obliku: $y(n) = -\delta(n-1) + (n-1)\mu(n-2)$.

Pretpostavimo da su za $n \geq 4$ vrijednosti impulsnog odziva nula:

$$\begin{aligned} y(n) = n - 1 = \sum_{m=0}^{n} h(m)(n-m+1)\mu(n-m) &= \sum_{m=0}^{n} h(m)(n-m+1) \\ &= h(0)(n+1) + h(1)(n-1+1) + h(2)(n-2+1) + h(3)(n-3+1) \\ &\quad + h(4)(n-4+1) + h(5)(n-5+1) + \cdots \\ &= -n + 3(n-1) - (n-2) + 0 + 0 + 0 + \cdots = n - 1 \end{aligned}$$

Kako je na taj način odziv jednak općem obliku odziva, traženi impulsni odziv je:

$$h(n) = \{\dots,\underline{0},-1,3,-1,0,0,\dots\}.$$

7. Diskretan sustav opisan je jednadžbom diferencija $y(n) - 6y(n-1) + 8y(n-2) = 4u(n)$. Ako je ulaz u sustav $u(n) = 2\mu(n) - 3n\mu(n)$, nađite:
   a. Prirodni, prisilni te totalni odziv sustava uz početne uvjete $y(-1) = 2, y(-2) = 1$.
   b. Mirni, nepobuđeni te totalni odziv uz početne uvjete $y(-1) = 2, y(-2) = 1$.

Rješenje:

Homogena jednadžba:

$$y(n) - 6y(n-1) + 8y(n-2) = 0$$

Pretpostavljeno homogeno rješenje: $y_h(n) = Cq^n$.

Karakteristična jednadžba: $q^2 - 6q + 8 = 0, (q-4)(q-2) = 0$.

Karakteristične frekvencije: $q_1 = 4, q_2 = 2$.

Homogeno rješenje: $y_h(n) = C_1 4^n + C_2 2^n$.

Partikularno rješenje: Ako je pobuda $u(n) = 2\mu(n) - 3n\mu(n)$, s desne strane zadane jednadžbe je $(8 - 12n)\mu(n)$. Kako je pobuda polinom i partikularno rješenje je oblika polinoma.

$$y_p(n) = K_0 + K_1 n, n \geq 0$$

Pomaknuta partikularna rješenja: $y_p(n-1) = K_0 + K_1(n-1), y_p(n-2) = K_0 + K_1(n-2)$.

Uvrštavanjem u zadanu jednadžbu:

$$K_0 + K_1 n - 6\big(K_0 + K_1(n-1)\big) + 8\big(K_0 + K_1(n-2)\big) = 8 - 12n.$$

Izjednačavanjem onoga uz *n* i onoga uz slobodni član izlaze konstante.

$$3K_0 - 10K_1 = 8$$

$$3K_1 = -12$$

Konstante su: $K_0 = -\frac{32}{3}, K_1 = -4$.

Partikularno rješenje je $y_p(n) = -\frac{32}{3} - 4n$, za $n \geq 0$.

Totalni odziv dobiva se zbrajanjem homogenog i partikularnog rješenja:

$$y(n) = C_1 4^n + C_2 2^n - \frac{32}{3} - 4n.$$

Konstante C_1 i C_2 određuju se iz početnih uvjeta u $n = 0$ i $n = 1$, koji se dobiju iterativnom metodom:

$$y(n) = 4(2 - 3n) + 6y(n-1) - 8y(n-2),$$

$$y(0) = 4(2 - 3 \cdot 0) + 6y(-1) - 8y(-2) = 8 + 12 - 8 = 12,$$

$$y(1) = 4(2 - 3) + 6y(0) - 8y(-1) = 8 - 12 + 72 - 16 = 52.$$

Totalni odziv u tim koracima je

$$y(0) = C_1 4^0 + C_2 2^0 - \frac{32}{3} - 4 \cdot 0 = y(0) = C_1 + C_2 - \frac{32}{3},$$
$$y(1) = C_1 4^1 + C_2 2^1 - \frac{32}{3} - 4 \cdot 1 = 4C_1 + 2C_2 - \frac{44}{3}.$$

Izjednačavanjem izlaze konstante $C_1 = \frac{32}{3}, C_2 = 12$.

Totalni odziv je sada

$$y(n) = \left(\frac{32}{3} \cdot 4^n + 12 \cdot 2^n - \frac{32}{3} - 4n\right)\mu(n).$$

Prisilni odziv je čisto partikularno rješenje: $y_{prisilni}(n) = \left(-\frac{32}{3} - 4n\right)\mu(n)$.

Prirodni odziv je homogeno rješenje čije su se konstante našle iz totalnog odziva

$$y(n) = \left(\frac{32}{3} \cdot 4^n + 12 \cdot 2^n\right)\mu(n).$$

Mirni odziv je odziv sustava kome su početni uvjeti jednaki nuli: $y(-1) = 0$, $y(-2) = 0$. Preračunavamo početne uvjete: $y(0) = 4u(0) + 6y(-1) - 8y(-2) = 8$, $y(1) = 4u(1) + 6y(0) - 8y(-1) = 44$.

Odziv mirnog sustava ima oblik $y_{mirni}(n) = C_1 4^n + C_2 2^n - \frac{32}{3} - 4n$. Uz uvrštavanje $n = 0{,}1$ izlazi:

$$y_{mirni}(0) = C_1 4^0 + C_2 2^0 - \frac{32}{3} - 4 \cdot 0 = C_1 + C_2 - \frac{32}{3}$$
$$y_{mirni}(1) = C_1 4^1 + C_2 2^1 - \frac{32}{3} - 4 \cdot 1$$

Izjednačavanjem sa početnim uvjetima dobivamo konstante $C_1 = \frac{32}{3}$ i $C_2 = 8$. Odziv mirnog sustava je

$$y_{mirni}(n) = \left(\frac{32}{3} 4^n + 8 \cdot 2^n - \frac{32}{3} - 4n\right)\mu(n)$$

Nepobuđeni odziv ima pobudu jednaku nuli, ali uz postojanje početnih uvjeta. Oblik nepobuđenog odziva dobivamo iz homogenog rješenja. Konstante tražimo direktnim uvrštavanjem početnih uvjeta:

$$y_{nepobuđeni}(n) = C_1 4^n + C_2 2^n$$

Početni uvjeti su zadani $y(-1) = 2, y(-2) = 1$. Pa je $y_{nepobuđeni}(-1) = \frac{1}{4}C_1 + \frac{1}{2}C_2 = 2$ i $y_{nepobuđeni}(-2) = \frac{1}{16}C_1 + \frac{1}{4}C_2 = 1$. Rješavanjem dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice dobivaju se konstante $C_1 = 0$ i $C_2 = 4$.

Nepobuđeni odziv je $y_{nepobuđeni}(n) = 4 \cdot 2^n$.

Totalni odziv je zbroj nepobuđenog i mirnog

$y(n) = \left(\frac{32}{3} \cdot 4^n + 12 \cdot 2^n - \frac{32}{3} - 4n\right)\mu(n)$ i jednak je totalnom odzivu dobivenom u a. dijelu zadatka.

8. Diskretni LTI sustav opisan je jednadžbom $y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=u(n)$. Odredite vrijednost odziva u koraku $n=2000$ za pobudu $u(n)=\mu(n)-\mu(n-1001)$ uz početni uvjet $y(-1)=6$.

Rješenje:

Homogeno rješenje zadane jednadžbe je:

$$q-\frac{1}{2}=0\rightarrow q=\frac{1}{2}\rightarrow y_h(n)=C\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Zadana pobuda se može promatrati kao $u(n)=\begin{cases}1, 0\leq n\leq 1000\\ 0, \qquad\quad \text{inače}\end{cases}$. Prvi dio pobude je $u(n)=\mu(n)$. Partikularno rješenje tada iznosi:

$$y_p(n)=K, y_p(n-1)=K$$
$$K-\frac{1}{2}K=1\rightarrow K=2$$
$$y_p(n)=2\mu(n).$$

Totalno rješenje u tom dijelu vremena je $y_{tot1}(n)=C\left(\frac{1}{2}\right)^n+2$.

Konstantu nalazimo iz početnog uvjeta $y(-1)=6$.

$$y(0)=u(0)+\frac{1}{2}y(-1)=4$$
$$y_{tot1}(0)=C+2\rightarrow\quad C+2=4\rightarrow C=2$$
$$y_{tot1}(n)=\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\right)\mu(n).$$

Ova pobuda prestaje djelovati u $n=1000$ i to će biti početni uvjet za drugi dio pobude:

$$y_{tot1}(1000)=\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}+2\right)\mu(1000)=2^{-999}+2.$$

Od 1001 uzorka nema više pobude, pa postoji samo homogeno rješenje uz upravo izračunati početni uvjet.

$$y_{tot2}(n)=C\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$y_{tot2}(1000)=C\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}=2^{-999}+2\rightarrow\ C=2+2^{1001}$$
$$y_{tot2}(n)=(2+2^{1001})\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ukupno totalno rješenje je $y_{tot}(n)=\begin{cases}\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\right), 0\leq n\leq 1000\\ (2+2^{1001})\left(\frac{1}{2}\right)^n, n>1000\end{cases}$.

Vrijednost odziva u koraku $n=2000$ je $y(2000)=(2+2^{1001})\left(\frac{1}{2}\right)^{2000}=2^{-1999}+2^{-999}$.

9. Zadan je sustav $y(n) - \frac{1}{4}y(n-1) = u(n)$.
   a. Odredite impulsni odziv sustava.
   b. Odredite mirni odziv sustava ako je pobuda $u(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \mu(n)$.
   c. Komentirajte stabilnost sustava.

Rješenje:

Homogeno rješenje je:

$$q - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow q = \frac{1}{4}.$$

$$y_h(n) = C\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

a. Impulsni odziv je odziv kada je $u(n) = \delta(n)$. Početni uvjeti su nula. Da bi dobili konstantu iz homogenog rješenja koja odgovara impulsnom odzivu, računamo odziv sustava u trenutku $n = 0$:

$$y(n) = \delta(n) + \frac{1}{4}y(n-1)$$

$$y(0) = \delta(0) + \frac{1}{4}y(-1) = 1$$

$$y_h(0) = C\left(\frac{1}{4}\right)^0 = C$$

$$y(0) = y_h(0) = C = 1.$$

Impulsni odziv je $h(n) = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \mu(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \mu(n)$.

b. Kako bi dobili mirni odziv sustava moramo naći partikularno rješenje. Kako je karakteristična frekvencija sustava jednaka frekvenciji pobude, pretpostavljeno partikularno rješenje je $y_p(n) = K\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot n$. Uvrštavanjem u jednadžbu

$$K\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot n - \frac{1}{4}K\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot (n-1) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$K = 1$$
$$y_p(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot n.$$

Mirni odziv je $y_{mirni}(n) = C\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot n$ uz početne uvjete jednake nuli: $y(-1) = 0 \rightarrow y(0) = u(0) + \frac{1}{4}y(-1) = 1$.

$$y_{mirni}(0) = C\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot 0 = C = 1$$
$$y_{mirni}(n) = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot n\right)\mu(n).$$

c. Kako je karakteristična frekvencija sustava $\frac{1}{4}$ po apsolutnoj vrijednosti manja od jedan, sustav je stabilan.

10. Zadan je sustav $y(n) + 4y(n-1) + 4y(n-2) = u(n)$.
   a. Odredite impulsni odziv sustava.
   b. Odredite prisilni i mirni odziv sustava ako je pobuda $u(n) = 4\mu(n)$.
   c. Odredite prisilni i mirni odziv sustava ako je pobuda $u(n) = (-2)^n\mu(n)$.
   d. Komentirajte stabilnost sustava.

Rješenje:

Impulsni odziv zadanog sustava je $h(n) = (-2)^n(1+n)\mu(n)$.

Prisilni odziv sustava na pobudu $u(n) = 4\mu(n)$ je $y_p(n) = \frac{4}{9}\mu(n)$.

Prisilni odziv sustava na pobudu $u(n) = (-2)^n\mu(n)$ je $y_p(n) = \frac{1}{2}n^2(-2)^n\mu(n)$.

Sustav je nestabilan.

11. Zadan je kauzalan, linearan i vremenski nepromjenjiv sustav $y(n) - \frac{1}{3}y(n-1) = u(n)$. Ukoliko je sustav pobuđen sa $u(n) = 2^{-n}\mu(n)$, uz početni uvjet $y(-1) = 9$, odredite:
   a. Odredite prisilni i prirodni odziv sustava.
   b. Odredite odziv nepobuđenog sustava, te odziv mirnog sustava.
   c. Odredite totalni odziv sustava.

Rješenje:

Prisilni odziv je $y_p(n) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n\mu(n)$.

Prirodni odziv sustava je $y_{prirodni}(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n\mu(n)$

Odziv mirnog sustava je $y_m(n) = \left(-2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\mu(n)$.

Odziv nepobuđenog sustava je $y_n(n) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Totalni odziv sustava je $y_t(n) = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\mu(n)$.